

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

线性代数笔记29——正定矩阵和最小值

原文链接 | https://mp.weixin.qq.com/s/wX6wmVSqJUTgbmk8Z1r2_w

判断正定矩阵

给出一个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

有4个途径可以判定该矩阵是否是正定矩阵（注意这个矩阵的4个元素中有2个b，这是因为正定矩阵是对称矩阵，如果A的次对角线的元素不相等，A就不是对称的，也就没有必要进一步判定是否是正定的）：

1. 所有特征值大于0, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$
2. 行列式及左上角的所有k阶子行列式均为正 ($1 \leq k \leq n$)
3. $a > 0, ac - b^2 > a$ （针对2阶矩阵）
4. 对于任意非零向量x, $x^T Ax > 0$

其中第4个是正定的定义，前3个是用来验证正定的条件。

当y怎样取值时，下面的2阶矩阵是正定的？

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & y \end{bmatrix}$$

根据条件2可知， $2y > 6^2$ 时，即 $y > 18$ 时，矩阵是正定的。

如果 $y = 18$ ，则矩阵正好处于正定的临界点上，此时A是奇异矩阵，有一个特征值是0， $x^T Ax = 0$ 。我们称这种处于临界点上的正定矩阵为半正定矩阵。

矩阵的二次型

再来看一下 $x^T Ax$ 。对于非零向量x来说，Ax是线性形式，加入 x^T 后就变成了含有二次项的形式，比如：

$$\begin{aligned} x^T Ax &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 18x_2^2 \\ &\Rightarrow ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \end{aligned}$$

这种形式称为矩阵的二次型。当然 $x^T Ax$ 也只有二次型，没有三次型和四次型，即使x是更多维度的向量也一样，比如当x是三维向量时，最终结果仍然只含有二次项：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 & a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$= (a_{11}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{31}x_1x_3) + (a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{32}x_2x_3) + (a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2)$$

如果对于任意非零向量 $\mathbf{x}$ 来说, 矩阵的二次型都大于0, 那么这个矩阵是正定矩阵。

$y=18$ 时 $\mathbf{A}$ 是半正定矩阵, 当 $x_1=3, x_2=-1$ 时, 其二次型为0:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 18x_2^2 = 2(x_1 + 3x_2)^2$$

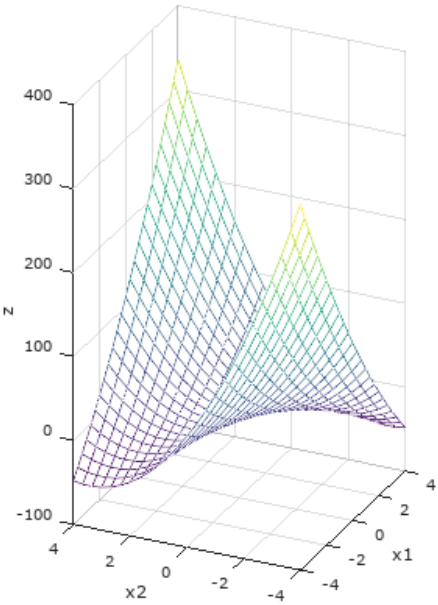
when $x_1 = 3, x_2 = -1$ then $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$

二次型的意义

为了画出几何图形, 我们以二阶矩阵为例, 先看一个非正定矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

它的二次型是 $2x_1^2 + 12x_1x_2 + 7x_2^2$, 其几何图形如下:



从图形上看没有最小值点, 原点处是一个鞍点, 在某个方向看是极大值, 同时又是另一个方向的极小值。下图是个经典的鞍点, 图形呈马鞍状:

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

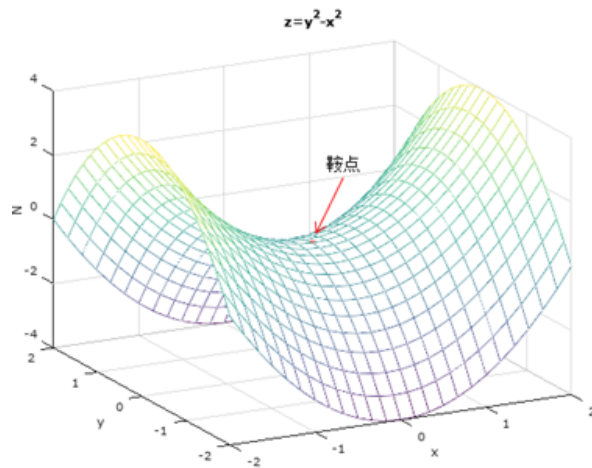
--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

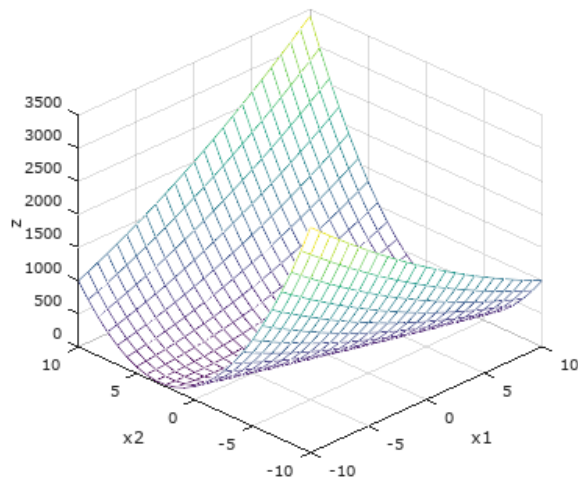
--trustInU



再来看正定矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$$

A 的二次型是 $f(x,y) = 2x^2 + 12xy + 20y^2$ ，图形如下：



回顾本节出现的两个二次型，它们都可以通过配方写成完全平方的形式：

$$2x^2 + 12xy + 7y^2 = 2(x + 3y)^2 - 11y^2$$

$$2x^2 + 12xy + 20y^2 = 2(x + 3y)^2 + 2y^2$$

当 x,y 不全是0时，可以判断第2个二次型一定大于0，第一个就不一定了。此外还可以通过二次型判断临界点是(0, 0)点。

经过配方后的二次型很奇妙，它还可以来自消元：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

消元变成了上三角矩阵。 A 可以通过LU分解成：

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

现在把原矩阵、二次型和LU分解放到一块：

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^2 & 6xy \\ 6xy & 20y^2 \end{bmatrix}$$

$$2x^2 + 12xy + 20y^2 = 2x^2 + 6xy + 6xy + 20y^2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad f(x, y) = 2(x + 3y)^2 + 2y^2$$

经过消元后的第一个主元是x的系数，第二个主元正是配方项 $2y^2$ 的系数，如果f大于0，那么这两个系数一定是正值，这也是为什么正定矩阵的主元一定都为正的原因。

换一个矩阵试试：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -11 \end{bmatrix}, \quad 2(x + 3y)^2 - 11y^2$$

其中一个主元是负数，对应的二次型也不能保证一定大于0。

正定矩阵与最小值

正定矩阵对应的二次型是有最小值的。

二元函数

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x^T A x = 2x^2 + 12xy + 20y^2$$

判断一元函数是否有最小值，需要判断它的导数和二阶导，同样，多元函数是否有最小值也要根据临界点和二阶导判断。我们在多变量微积分中介绍过怎样判断二元函数的最小值，最小值出现在临界点上： $f(x, y)$ 的一个临界点是 (x_0, y_0) ，即 $f_x(x_0, y_0) = 0$ 且 $f_y(x_0, y_0) = 0$ ，f的最小值是根据二阶导数判断的：

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \text{ and } f_{xx}(x_0, y_0) > 0$$

对于 $f(x, y) = 2x^2 + 12xy + 20y^2$ 来说：

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 12y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 12x + 40y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 0$$

$$f_{xx}(0, 0) = 4, \quad f_{yy}(0, 0) = 40, \quad f_{xy}(0, 0) = 12$$

临界点符合最小值的条件，因此 $(0, 0)$ 是 $f(x, y) = 2x^2 + 12xy + 20y^2$ 的最小值。这个结论实际上来源于对A的二阶导矩阵的正定性的判断：

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 40 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$$

对于二元函数的混合偏导来说， f_{xy} 和 f_{yx} 是一样的，因此这个矩阵是对称矩阵。在求得临界点后，根据判定正定矩阵的第3条，只要满足下面的条件，则这个二阶导矩阵是正定矩阵：

$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0 \text{ and } f_{xx} > 0$$

三元函数

现在召唤一个三元矩阵，然后判断它的正定性：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

先对其进行消元：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

A 的主元都大于0，这符合正定矩阵的性质，是一个必要条件。

接下来我们通过子行列式判断 A 的正定性：

$$|A| = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 4, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad |a_{11}| = 2$$

现在可以确定 A 是正定矩阵。如果进一步求得特征值，则 A 的3个特征值是：

$$2 - \sqrt{2}, \quad 2, \quad 2 + \sqrt{2}$$

特征值之和等于 A 的迹，特征值之积等于 A 的主元之积。

A 是正定矩阵，因此可以判定 A 的二次型是有最小值的：

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

用配方法验证：

$$f(\mathbf{x}) = 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + 2\left(x_3 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + x_2^2 > 0 \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$$

可以看出最小值的点是(0, 0, 0)。

原文链接 | https://mp.weixin.qq.com/s/wX6wmVSqJUTgbmk8Z1r2_w

更多极值问题，可参考作者公众号的专栏《单变量微积分》《单变量微积分》《程序员的数学》中的相关文章。

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [线性代数](#)

标签: [正定矩阵](#), [正定矩阵的判断](#), [最小值](#)

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
[+加关注](#)

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [线性代数笔记28——复矩阵和快速傅立叶变换](#)
» 下一篇: [线性代数笔记30——相似矩阵和诺尔当型](#)

posted on 2019-11-28 17:02 我是8位的 阅读(2444) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office
文档在线编辑
APIs

打开 >

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

历史上的今天:

2017-11-28 单变量微积分笔记25——弧长和曲面面积

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes